Criterios para la convergencia de Series

Criterio de PRINSGEIM

Proposición:

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie de términos positivos $/\exists\ \lambda = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\cdot a_n$ para cierto $\alpha \Rightarrow$

1) Si $\alpha > 1$ y $0 \le \lambda < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente
2) Si $\alpha \le 1$ y $0 < \lambda \le +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente

Demostración:

Primero definimos $b_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$

1) Sea $0 \le \lambda < k < +\infty$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \ge n_0$ $\dfrac{a_n}{b_n} < k \Leftrightarrow a_n < k\cdot b_n \Leftrightarrow a_n < \dfrac{k}{n^{\alpha}}$

como $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{k}{n^{\alpha}}$ es convergente, luego $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también lo es.

2) Sea $0 < k < \lambda \le +\infty$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \ge n_0$ $\dfrac{a_n}{b_n} > k \Leftrightarrow a_n > k\cdot b_n \Leftrightarrow a_n > \dfrac{k}{n^{\alpha}}$ como $\alpha < 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{k}{n^{\alpha}}$ es divergente, luego $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también lo es.

Criterio de la RAÍZ

Proposición

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie de términos positivos / $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \text{Supr} \sqrt[n]{a_n}$

1) Si $\lambda < 1 \Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente
2) Si $\lambda > 1 \Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente
3) Si $\lambda = 1$ El criterio no decide

Demostración:

1) $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Supr} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sea $\lambda < r < 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\sqrt[n]{a_n} < r$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ $a_n < r^n$ y como $r < 1$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n$ es convergente $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ también lo es.

2) Sea $1 < r < \lambda$ $\Rightarrow$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $\sqrt[n]{a_n} > r$ $\Rightarrow a_n > r^n$ y como $r > 1$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n$ es divergente $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ también lo es.

3)

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ usando el criterio de la raíz: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lambda = 1$ y la serie es divergente.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ usando el criterio de la raíz: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \lambda = 1$ y la serie es convergente.

Criterio del COCIENTE:

Sea $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie de términos positivos / $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

1) Si $\lambda < 1 \Rightarrow$ La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente

2) Si $\lambda > 1$ $\Rightarrow$ La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente

3) Si $\lambda = 1$ el criterio no decide

Demostración:

– La demostración de este criterio es igual que el ejercicio 9 del tema 2.

1) $\lambda < 1$

Sea $\lambda < r < 1$

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$a_{n+1} < r \cdot a_n$ Sea $n = n_0$

$$a_{n_0+1} < r \cdot a_{n_0}$$
$$a_{n_0+2} < r \cdot a_{n_0+1} < r^2 \cdot a_{n_0}$$
$$a_{n_0+3} < r \cdot a_{n_0+2} < r^3 \cdot a_{n_0}$$
$$\vdots$$
$$a_{n_0+k} < r^k \cdot a_{n_0}$$

Sea $n > n_0$

$$a_{n+(n_0-n_0)} = a_{n_0+(n-n_0)}$$

$$a_{n_0+(n-n_0)} < r^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \quad \Leftrightarrow \quad a_n < r^n \cdot \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$$

$\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$ es constante. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cdot \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$ es una serie Geométrica de razón $r < 1$ por lo que es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge.

2) Es bastante parecido (prácticamente igual)

3)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ usando el criterio del cociente: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ Usando el criterio del cociente: $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.