

Teorema de Darboux

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en I . Sean $a, b \in I$ con $a < b$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b) \Rightarrow \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) / f'(\xi) = \alpha$ (f' verifica la propiedad de los valores intermedios).

Demostración:

Supongamos $f'(a) < \alpha < f'(b)$. Sea $g(x) = f(x) - \alpha \cdot x$

$g(x)$ es continua en $[a, b]$ por ser suma de funciones continuas.
 $g(x)$ es derivable en $[a, b]$ por ser suma de funciones derivables.

$$\left. \begin{array}{l} g'(a) = f'(a) - \alpha < 0 \\ g'(b) = f'(b) - \alpha > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

NOTA: que $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ en un entorno E del punto a es decreciente.

$g(x)$ es continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass $\Rightarrow \Rightarrow g(x)$ alcanza su máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} \exists t_0 \in (a, b) / g(t_0) < g(a) \\ t_1 \in (a, b) / g(t_1) < g(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{el mínimo se alcanza en } [a, b]$$

Sea $\xi \in (a, b)$ donde $g(\xi)$ es mínimo en $[a, b]$, por el teorema de Fermat $\Rightarrow g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \alpha$