*Condicion necesaria y suficiente para la integrabilidad*

Sea $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ acotada $\Rightarrow$ Son equivalentes

1: $f$ es integrable en $[a,b]$

2: $\forall\varepsilon>0\,\exists P_{\varepsilon}$ partición de $[a,b]$ / si $P$ es más fina que $P_{\varepsilon}\Rightarrow$

$\Rightarrow S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$ ó $S(f,P_{\varepsilon})-s(f,P_{\varepsilon})<\varepsilon$

Demostración:

$$1\Rightarrow 2:\quad f \text{ es integrable}\Rightarrow\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx-\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$$

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists P_1 \text{ particion de}[a,b]/\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}\leq s(f,P_1)$$

$$\exists P_2 \text{ particion de}[a,b]/\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}\geq S(f,P_2)$$

$$\Rightarrow \text{Sea } P_{\varepsilon} \text{ una partición mas fina que } P_1 \text{ y } P_2, \text{ por ejemplo } P_{\varepsilon}=P_1\cup P_2$$

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}\leq s(f,P_1)\leq s(f,P_{\varepsilon})\leq S(f,P_{\varepsilon})\leq S(f,P_2)\leq\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$S(f,P_{\varepsilon})-s(f,P_{\varepsilon})\leq\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}-\left(\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

$$\text{Si } P \text{ es más fina que } P_{\varepsilon}\Rightarrow S(f,P)-s(f,P)\leq S(f,P_{\varepsilon})-s(f,P_{\varepsilon})<\varepsilon$$

$2\Rightarrow 1$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P_{\varepsilon} \text{ una partición de}[a,b]/S(f,P_{\varepsilon})-s(f,P_{\varepsilon})<\varepsilon$$

$$S(f,P_{\varepsilon})\geq\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx\geq\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx\geq s(f,P_{\varepsilon})$$

$$0\leq\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx-\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx\leq S(f,P_{\varepsilon})-s(f,P_{\varepsilon})<\varepsilon$$

$$\text{Haciendo } \varepsilon\rightarrow 0\Rightarrow 0\leq\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx-\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx-\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=0\Rightarrow\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx=\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx\Rightarrow f \text{ es integrable}$$