Teorema de Bolzano

$$Sea\,[a,b]\,un\,intervalo\,cerrado\,y\,acotado,\ f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}\ continua\ con\ f(a)\cdot f(b)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, x_0\in[a,b]\,/\,f(x_0)=0$$

$$NOTA: x_0\ no\ tiene\ porque\ ser\ único$$
$$NOTACIÓN: Si\ f(x_0)=0\ diremos\ que\ x_0\ es\ un\ cero\ de\ f$$

Prueba:

$$a=a_1;\quad b=b_1;\quad x_1=\frac{a+b}{2}$$

Pueden ocurrir tres casos:

$$i>f(a_1)\cdot f(x_1)>0\ \Rightarrow\ f(x_1)\cdot f(b_1)<0$$
$$ii>f(a_1)\cdot f(x_1)=0\ \Rightarrow\ x_1\ es\ un\ cero\ de\ f$$
$$iii>f(a_1)\cdot f(x_1)<0\ \Rightarrow\ a_2=a_1\ y\quad b_2=x_1$$

$$b_1-a_1=b-a$$
$$b_2-a_2=\frac{b-a}{2}$$
$$b_3-a_3=\frac{b-a}{2^2}$$
$$\vdots$$
$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

$$Dados\ \ a_n\ \ y\ \ b_n\ \ definimos\ \ x_n\ \ como:\ \frac{a_n+b_n}{2}$$
$$i>f(a_n)\cdot f(x_n)>0\ \Rightarrow\ f(x_n)\cdot f(b_n)<0$$
$$ii>f(a_n)\cdot f(x_n)=0\ \Rightarrow\ x_n\ \ es\ un\ cero\ de\ f$$
$$iii>f(a_n)\cdot f(x_n)<0\ \Rightarrow\ a_{n+1}=a_n\quad y\quad b_{n+1}=x_n$$

$$La\ sucesión\ (a_n)_n\ es\ creciente\ y\ la\ sucesión\ (b_n)_n\ es\ decreciente$$
$$a_n\le b_n$$
$$a=a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1=b$$

$$\left.\begin{pmatrix}\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=Supr\{a_n/n\in\mathbb{N}\}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n=Inf\{b_n/n\in\mathbb{N}\}\\ b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n-1}}\end{pmatrix}\right.\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=x_0=\lim_{n\to+\infty} b_n$$

$$a\le a_n\le x_0\le b_n\le b\quad\Rightarrow\quad x_0\in[a,b]$$

$$0\le f(x_0)\cdot f(x_0)=\lim_{n\to+\infty}(f(a_n)\cdot f(b_n))\le 0$$
$$[f(x_0)]^2=0\Rightarrow f(x_0)=0$$