

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si $(X_n)_n$ es una sucesión acotada \Rightarrow tiene puntos de acumulación.
 Más aun se pueden encontrar dos subsucesiones de $(X_n)_n$ convergentes
 (α_k) y (β_k) / para cualquier subsucesión (Y_p) de $(X_n)_n$ convergente se verifica :

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \leq y = \lim_{p \rightarrow +\infty} y_p \leq \beta = \lim_{m \rightarrow +\infty} \beta_m$$

Demostración :

$$\{x_m / m \geq n\} \supseteq \{x_m / m \geq n+1\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \text{Inf} \{x_m / m \geq n\} \leq a_{n+1} = \text{Inf} \{x_m / m \geq n+1\} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \text{Supr} \{x_m / m \geq n\} \geq b_{n+1} = \text{Supr} \{x_m / m \geq n+1\} \Rightarrow b_n \geq b_{n+1}$$

$(a_n)_n$ es una sucesión monótona creciente
 $(b_n)_n$ es una sucesión monótona decreciente

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$\begin{cases} a_1 \leq a_n \leq b_1 \\ a_1 \leq b_n \leq b_1 \end{cases} \Rightarrow (a_n)_n \text{ y } (b_n)_n \text{ est\u00e1n acotadas}$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \\ \beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \\ Y_p = X_{n_p} \text{ (subsuc. conv.)} \end{array} \right) \Rightarrow a_{n_p} \leq x_{n_p} \leq b_{n_p} \Rightarrow \alpha \leq \lim_{n_p \rightarrow +\infty} x_{n_p} \leq \beta$$

Encontramos subsucesiones que convergen a α y β

Sea $\varepsilon = 1 \Rightarrow a_1 = \text{Inf} \{x_m / m \geq 1\}$ a_1 no es cota inferior de $\{x_m / m \geq 1\}$
 $\exists n_1 \in \mathbb{N} : n_1 \geq 1 / a_1 \leq x_{n_1} \leq a_1 + 1$

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow a_{n_1+1} = \text{Inf} \{x_m / m \geq n_1+1\}$ a_{n_1+1} no es cota inferior de $\{x_m / m \geq n_1+1\}$
 $\exists n_2 \in \mathbb{N} : n_2 \geq n_1+1 > n_1 / a_{n_1+1} \leq x_{n_2} \leq a_{n_1+1} + \frac{1}{2}$

Lo suponemos cierto para k

$$\varepsilon = \frac{1}{k+1} \rightarrow a_{n_k+1} \leq x_{n_k} \leq a_{n_k+1} + \frac{1}{k+1}$$

tomando l\u00edmites cuando $n_k \rightarrow +\infty$

$$\begin{array}{cccc} a_{n_k+1} & \leq & x_{n_k} & \leq & a_{n_k+1} & + & \frac{1}{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \alpha & & \alpha & & 0 \end{array}$$

$x_{n_k} \rightarrow \alpha$ por el T^a del Sandwich

Analogamente se encuentra b_{n_k} que converge a β